

Análise Matemática IV - 2003/04

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 4

1. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- (a) Mostre que u é uma função harmónica.
- (b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 0$.
- (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz \quad \text{e} \quad \oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

Resolução:

(a) É óbvio que u é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser uma função polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6x$$

sendo então evidente que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Por definição, u e v têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2) dy$$

ou seja

$$v(x, y) = 3x^2 y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)) = -3y^2 + 3x^2 + 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 3x^2 \Rightarrow C_1(x) = x^3 + C \Rightarrow v(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + C$$

Dado que $v(0, 0) = 0$ tem-se que $C = 0$ e finalmente $v(x, y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3$.

(c) Pela alínea anterior, a função

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

é uma função inteira, pelo que $\frac{f(z)}{(z-1)^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Como $1 \in \text{int } C$, e C é uma curva simples e fechada, estamos nas condições de utilizar a fórmula integral de Cauchy generalizada ($n = 1$),

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz &= 2\pi i f'(1) = 2\pi i \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(1,0)} \right) \\ &= 2\pi i \left(3x^2 - 6xy - 3y^2 + i(6xy - 3y^2 + 3x^2) \Big|_{(x,y)=(1,0)} \right) \\ &= 6\pi i(1 + i) \end{aligned}$$

O segundo integral pode ser calculado como o anterior utilizando, neste caso, a fórmula integral de Cauchy com $n = 2$. Alternativamente, e atendendo a que

$$\begin{aligned} f(z) &= x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + i(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3) \\ &= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + y^3 - 3(ix)y^2 + 3(ix)^2y - (ix)^3 \\ &= (x + iy)^3 + (y - ix)^3 \\ &= z^3 + iz^3 = (1 + i)z^3, \end{aligned}$$

então, pelo Teorema de Cauchy:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz = \oint_C (1 + i) dz = 0.$$

2. Considere a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} tais que $u(x, y) = \text{Re}[g(x + iy)]$ e $v(x, y) = \text{Im}[g(x + iy)]$.
 - (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g ?
 - (b) Mostre que u é uma função harmónica.

(c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica em \mathbb{C} , tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

Resolução:

(a) Fazendo $z = x + iy$

$$\begin{aligned} g(z) &= z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2) = (x + iy)((x + iy)^2 + (x - iy)^2 - (x^2 + y^2)) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(x^2y - 3y^3) \end{aligned}$$

pelo que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = x^2y - 3y^3$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 9y^2$$

É óbvio que todas estas funções são contínuas em \mathbb{R}^2 , visto serem funções polinomiais. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow 2x^2 + 6y^2 = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow xy = 0$$

Conclui-se que as condições de Cauchy-Riemann se verificam sse $(x, y) = (0, 0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z = 0$ e consequentemente o seu domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

(b) Como já se referiu, $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

e é óbvio que $\Delta u = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Denotaremos a harmónica conjugada de u por \tilde{v} . Por definição, u e \tilde{v} têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \tilde{v}(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2y - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y - y^3 + C_1(x)) = 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 0 \Rightarrow C_1(x) = C \Rightarrow \tilde{v}(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$$

Note que, como seria de esperar atendendo ao resultado da alínea (a), a conjugada harmónica de u , \tilde{v} , é distinta de v .

3. Calcule os região de convergência das seguintes séries de potências:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4 + 1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z + 1 - i)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z + 1)^n$$

Resolução:

(a) Note-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\right)^n}{n^4 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (z - 2i)^n}{n^4 + 1}$$

pelo que se trata de uma série de potências da forma $\sum a_n (z - 2i)^n$. Tem-se então (caso o limite exista):

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{\frac{(1/\sqrt{2})^n}{n^4 + 1}}{\frac{(1/\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)^4 + 1}} = \sqrt{2} \lim_n \frac{(n+1)^4 + 1}{n^4 + 1} = \sqrt{2}.$$

Assim, a série é convergente na região:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < \sqrt{2}\}.$$

(b) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n (z + 1 - i)^n$. Tem-se então:

$$1/R = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_n \frac{1}{n} = 0$$

pelo que $R = +\infty$. Consequentemente, a série é convergente em \mathbb{C} .

(c) Trata-se de uma série de potências da forma $\sum a_n (z + 1)^n$. Tem-se então, caso o limite exista

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = e$$

e a série é convergente na região

$$\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < e\}$$

4. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_n = \begin{cases} 5^n & \text{se } n \text{ par} \\ (-2)^n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Sabendo que esta é a série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ de uma função f , analítica em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

Resolução:

Dado que as duas subsucessões de a_n são $(-2)^n$ e 5^n , vê-se facilmente que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ par} \\ -2 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 5.$$

Tem-se então que a série converge na região

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{5}\}$$

Assim sendo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ diverge em $z = 1$, pelo que é impossível calcular o valor de $f(1)$ por substituição de $z = 1$ naquela série. Porém, na região $|z| < \frac{1}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n \text{ par}} 5^n z^n + \sum_{n \text{ ímpar}} (-2)^n z^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 5^{2m} z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^{2m+1} z^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left((5z)^2\right)^m - 2z \sum_{m=0}^{\infty} \left((2z)^2\right)^m \\ &= \frac{1}{1 - 25z^2} - \frac{2z}{1 - 4z^2} \end{aligned}$$

Como f é analítica em todo o seu domínio, concluímos que:

$$f(z) = \frac{1}{1 - 25z^2} - \frac{2z}{1 - 4z^2}, \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{2} \right\},$$

o que implica que $f(1) = \frac{5}{8}$

5. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

- (a) $\sin z$, em torno de $z = \pi$.
- (b) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.
- (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
- (d) Valor principal de $\log z$ em torno de $z = i - 1$.

Resolução:

(a) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sin(z + \pi - \pi) = -\sin(z - \pi) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(b) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{2z} = e^{2(z-i\pi)} e^{2i\pi} = e^{2(z-i\pi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z - i\pi)^n$$

(c) Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z^2 e^z &= (z - 1 + 1)^2 e^{z-1+1} = [(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1] e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{n!} \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^{n+2}}{n!} + 2e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^{n+1}}{n!} + e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n \end{aligned}$$

em que

$$a_n = \begin{cases} e & \text{se } n = 0 \\ 3e & \text{se } n = 1 \\ \frac{e}{(n-2)!} + \frac{2e}{(n-1)!} + \frac{e}{n!} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(d) Para todo o z em $D = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C} : y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$ (o domínio de analiticidade do v.p. do logaritmo):

$$(\log z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{z - i + 1 + i - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z-i+1}{i-1}} = \frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i+1}{i-1} \right)^n, \quad (1)$$

para $|z + i - 1| < |i - 1| = \sqrt{2}$. Primitivando, obtem-se:

$$\log z = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - i + 1)^{n+1}}{(n+1)(i-1)^{n+1}} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z - i + 1)^n}{n(i-1)^n}.$$

Esta igualdade é válida no maior disco centrado em $z - i + i$ que não intersecta o semieixo real negativo, ou seja, para $|z + i - 1| < 1$. Note-se que este disco está contido no domínio de convergência da série (1). Finalmente, fazendo $z = i - 1$ na igualdade anterior, obtem-se $C = \log(i - 1)$. Assim:

$$\log z = \frac{1}{2} \log 2 + i \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z - i + 1)^n}{n(i-1)^n},$$

para $|z - i + 1| < 1$.

6. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

(a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$

Resolução:

Dado que $|z| > 1$ (o que implica $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$), é válido o desenvolvimento

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

(b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z\right)$, $|z| > 0$

Resolução:

Para $z \neq 0$, é válido

$$z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z\right) = z^5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} + z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-5}} + z^6$$

(c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i| > 1$

Resolução:

Para $|z - i| > 1$ (o que implica $\frac{1}{|z - i|} < 1$), tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z - 2i)^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z - 2i} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z - i - i} \right) \\ &= -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{z - i}} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z - i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z - i} \right)^n \right) \\ &= -\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(z - i)^{n+1}} \right)\end{aligned}$$

Usando o facto de a série geométrica ser uniformemente convergente na região $\{z : |\frac{1}{z-i}| < r\}$ para todo $r < 1$, podemos derivar termo a termo, obtendo-se

$$\frac{1}{(z - 2i)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{i^n}{(z - i)^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+1)}{(z - i)^{n+2}}$$

Finalmente

$$\frac{z - i}{(z - 2i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+1)}{(z - i)^{n+1}} \quad \text{para } |z - i| > 1$$

(d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right), |z| > 0.$

Resolução:

Para $|z| > 0$

$$\begin{aligned}(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right) &= (3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\pi + \frac{1}{z^2} \right) = (1 - 3z^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z^2} \right) \\ &= (1 - 3z^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z^2} \right)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}}{(2n+1)! z^{4n}}\end{aligned}$$

7. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z - 1| < 2$.

(b) $2 < |z - 1|$.

e calcule os seguintes integrais:

$$(a) \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$(b) \oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$$

Resolução:

(a) Para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, tem-se que

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z+1} \right)$$

Para $0 < |z-1| < 2$, é válido

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{2+z-1} \right) = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{2(1+\frac{z-1}{2})} \right) \\ &= \frac{-1}{2(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

Pela convergência uniforme da série geométrica, podemos derivar termo a termo e obter

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{-1}{2(z-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{(z-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{(z-1)^{n-3}}{2^{n+1}}$$

Por outro lado, se $|z-1| > 2$ (o que implica $\frac{2}{|z-1|} < 1$), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{2+z-1} \right) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} \right) \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^n} \right) = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n (-n-1)}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1)}{(z-1)^{n+4}} \end{aligned}$$

(b) Por definição, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

é o coeficiente de $(z - z_0)^n$ da série de Laurent de f convergente na região $r < |z - z_0| < R$, para qualquer curva de Jordan C , seccionalmente regular, percorrida em sentido directo, contida na região de convergência. Sendo assim, e atendendo a que a circunferência $|z - 1| = 1$ é uma curva de Jordan e está contida na região $0 < |z - 1| < 2$, o integral pedido

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z - 1)^0} dz = 2\pi i a_{-1}$$

em que a_{-1} é o coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ da primeira série obtida em (a). Assim,

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi i}{4}$$

Analogamente, e dado que a circunferência $|z - 1| = 3$ é uma curva de Jordan e está contida na região $|z - 1| > 2$, o integral pedido

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz = \oint_{|z-1|=3} \frac{f(z)}{(z - 1)^0} dz = 2\pi i a_{-1}$$

em que a_{-1} é o coeficiente de $\frac{1}{z-1}$ da segunda série obtida em (a). Assim,

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz = 0$$

8. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em \mathbb{C} , percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ .

Resolução:

Se $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ é um polinómio de grau n então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

onde z_1, \dots, z_n são os zeros de $P(z)$ (alguns dos factores podem aparecer repetidos). Então:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d}{dz} \log P(z) = \frac{d}{dz} \left(\log a_0 + \sum_{k=1}^n \log(z - z_k) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}.$$

Desta forma:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_k} dz$$

Calculando

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_k} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } z_k \notin \text{int } \gamma, \\ 2\pi i & \text{se } z_k \in \text{int } \gamma, \end{cases}$$

obtem-se o resultado.